1.11. Ejercicios

1. Dados los puntos $A\,(2,-3)$ y $B\,(1,6)$, calcula:
   a) El vector $\vec{AB}$
   b) El vector $\vec{BA}$
   c) El módulo del vector $\vec{AB}$. ¿Coincide con el módulo del vector $\vec{BA}$?
   d) El argumento de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$
   e) ¿Cómo son los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$?

2. Halla el módulo y el argumento del vector $\vec{v}=(-4,3)$

3. Dados los vectores $\vec{u}=(-2,3)$ y $\vec{v}=(3,4)$ calcula:
   a) $\vec{u}+\vec{v}$
   b) $\vec{u}-\vec{v}$
   c) Representa los dos vectores, la suma y la resta.

4. Calcula el vector cuyo origen es el punto $A\,(5,-2)$ y el extremo el punto $B\,(-2,0)$.

5. Calcula el extremo del vector $\vec{v}=(-3,2)$ cuyo origen está en el punto $P\,(4,-1)$.

6. Imagina que están en el punto $(5,4)$ y te mueves hasta el punto $(-3,2)$, ¿qué vector representa ese movimiento? Si las unidades están en metros, ¿cuántos metros te has movido?

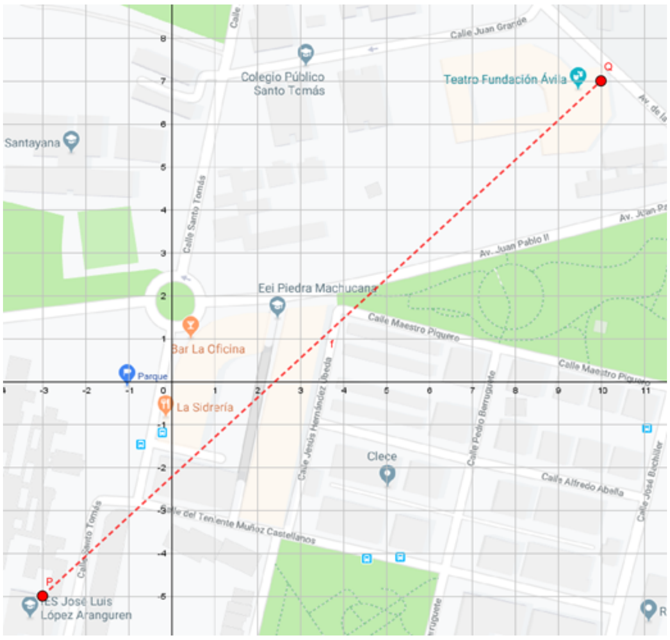
7. Dados los vectores $\vec{u}=(3,2)$ y $\vec{v}=(-4,-5)$, calcula y representa los vectores:
   a) $\vec{u}+\vec{v}$
   b) $\vec{u}-\vec{v}$
   c) $3\vec{u}+5\vec{v}$.

8. Dados un punto $P\,(a,b)$ y un vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$. ¿Tiene sentido la suma $P+\vec{v}$? ¿Cómo definirías la suma con palabras? El resultado de la suma, ¿es un punto o un vector? Aplícalo para hallar la suma del punto $P\,(2,3)$ y el vector $\vec{v}=(-1,4)$.

9. Dados los vectores $\vec{u}=(3,1)$, $\vec{v}=(6,2)$ y $\vec{w}=(9,3)$, ¿tienen la misma dirección, es decir, las rectas que los contienen son paralelas? Añade otro vector que tenga la misma dirección al vector $\vec{u}$. ¿es el vector $\vec{y}=(12,3)$ paralelo a $\vec{v}$? ¿Puedes dar una norma para saber si una serie de vectores tienen la misma dirección?

10. Halla la distancia entre los puntos $A\,(-3,1)$ y $B\,(6,-4)$.

11. Observa el siguiente mapa y contesta a las siguientes preguntas:



   a) ¿Cuál es la distancia, en línea recta, entre el IES José Luis L. Aranguren (punto P) y el Teatro Caja de Ávila (punto Q)?

   b) Si la escuela de turismo está en la misma línea recta que el IES Aranguren y el teatro Caja de Ávila y a la misma distancia del Teatro que el Teatro del Instituto. ¿Cuáles serán las coordenadas del punto en el mapa de la escuela de turismo?

12. Determina el valor de k, sabiendo que la distancia entre el punto $A\,(-4,3)$ y el punto $B\,(k,3)$ es $\sqrt{85}$.

13. Halla el punto medio de los puntos $(2,6)$ y $(-3,5)$

14. Halla el punto simétrico del punto $A\,(4,-3)$ con respecto al punto $P\,(5,1)$

15. ¿Qué puntos dividen al segmento de extremos $A\,(3,-2)$ y $B\,(9,1)$ en tres partes iguales?

16. Divide el segmento que une los puntos $A\,(-7,-6)$ y $B\,(5,-2)$ en cuatro partes iguales.

17. ¿Qué puntos dividen al segmento de extremos $A\,(1,3)$ y $B\,(5,-5)$ en cuatro partes iguales?

18. Comprueba si los puntos $(-7,-2)$, $(-2,1)$ y $(3,4)$ están alineados.

19. Comprueba si los puntos $(-6,7)$, $(-4,3)$ y $(1,-6)$ están alineados.

20. Calcula el punto medio del vector $\vec{u}=(1,-4)$ y cuyo origen está en el punto $P\,(2,0)$.

21. Halla el producto escalar de dos vectores sabiendo que los módulos de los dos vectores son 5 y 6 y que forman un ángulo de 30°.

22. Dados los vectores $\vec{u}=(2,3)$, $\vec{v}=(-3,2)$, $\vec{w}=(1,1)$ e $\vec{y}=(8,12)$, calcula los siguientes productos escalares:

    a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Interpreta el resultado: ¿cómo son los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

    b) $\vec{u}\cdot\vec{y}$.

    c) $\vec{u}\cdot\vec{w}$

    d) $\vec{v}\cdot\vec{w}$

23. Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (5, 3)$.

b) $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (4, -3)$.

c) $\vec{u} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(-1, \sqrt{3}\right)$.

d) $\vec{u} = (1, 4)$ y $\vec{v} = (2, 8)$.

e) $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (4, -6)$.

24. Escribe un vector perpendicular al vector $\vec{u} = (4, -3)$. ¿Cuántas soluciones hay?

25. Escribe un vector unitario (de módulo 1) perpendicular al vector $\vec{u} = (-3, -2)$. ¿Cuántas soluciones hay? Escribe todas las soluciones posibles.

26. Escribe un vector de módulo 3 perpendicular al vector $\vec{u} = (-4, 2)$.

27. Escribe un vector de módulo 5 paralelo al vector $\vec{u} = (2, -5)$.

28. Calcula k para que el vector $\vec{v} = (2, -5)$ y $\vec{u} = (k, 2)$:

    a) Sean perpendiculares.

    b) Sean paralelos.

    c) Tengan el mismo módulo.

29. Demuestra que el triángulo de vértices $A\,(2, 2)$, $B\,(0, 5)$ y $C\,(4, 5)$ es isósceles. Halla su área.

30. Calcula los lados y ángulos de un triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 3)$ y $C = (3, 4)$. Clasifica el triángulo según sus ángulos y calcula su área.

31. Calcula el perímetro del paralelogramo de vértices $A\,(-4, 1)$, $B\,(2, -3)$, $C\,(2, 0)$ y $D\,(-4, -2)$. Calcula el área del paralelogramo (tendrás que utilizar conocimientos de trigonometría).

32. Un coche de policía tiene que ir a desactivar una bomba. El coche está situado en el punto $A\,(2, 3)$ y las instrucciones del terrorista le dictan que se dirija al punto $B\,(1, -1)$. Allí gire $90°$ en sentido de las agujas del reloj y avance 5 km. en línea recta. En el punto final estará la bomba que ha de desactivar. ¿En qué punto se encuentra la bomba? (Las unidades de los puntos son kilómetros).

33. Calcula el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (3, 4)$

34. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\,(1, 0)$ y $B\,(2, 1)$

35. Dada la recta $r \equiv 3x - 2y + 4 = 0$

    a) Escribe un vector director de esta recta.

    b) Escribe un vector normal a esta recta.

    c) Escribe una recta, s, paralela a r y que pase por el punto $(3, 5)$

    d) Escribe una recta, t, perpendicular a r y que pase por el punto $(2, 1)$

    e) Representa las rectas r, s y t.

36. Dada una recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(4, -1)$

    a) Halla el vector director y la pendiente de la recta.

    b) Halla la ecuación implícita.

    c) Represénta la recta.

37. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (2, -3)$.

38. Halla las ecuaciones de la recta que pasan por los puntos $(4, -3)$ y $(0, 2)$

39. Dada la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-2}$

    a) Halla un vector director de la recta.

    b) Halla un punto de la recta.

    c) Escribe la ecuación de la recta en forma explícita.

40. Halla el vector director, la pendiente de las rectas que pasan por los puntos A y B y la pendiente de las rectas perpendiculares en los siguientes casos:

    a) $A(0, 0)$ y $B(2, 5)$

    b) $A(2, 3)$ y $B(4, -2)$

    c) $A(-2, 3)$ y $B(3, -4)$

    d) $A(0, 2)$ y $B(2, 0)$

41. Dada la recta $y = 3x - 1$

    a) Indica qué tipo de ecuación es.

    b) Halla un punto de la recta.

    c) Escribe un vector director de la recta.

    d) Escribe un vector normal a la recta.

    e) Represéntala.

42. Halla el valor de t para que la recta $tx + 2y - 1 = 0$ pase por el punto $(1, -1)$

43. Representa la recta que pasa por el punto $P(-2, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, 2)$.

44. Representa la recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ y tiene -2 de pendiente. Escribe también su ecuación en forma explícita y halla un vector director de la recta.

45. Calcula una recta paralela a la recta $x + 3y - 2 = 0$ y que pase por el punto $(1, 1)$

46. Calcula una recta paralela y otra perpendicular de la recta $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y}{2}$ y que pasen por el punto $(-3, 1)$.

47. Escribe una recta horizontal que pase por el punto $(2, 1)$.

48. Escribe una recta vertical que pase por el punto $(-3, 4)$

49. Escribe la ecuación de la recta horizontal que pasa por el origen de coordenadas. ¿Cómo se llama esta recta?

50. Escribe la ecuación de la recta vertical que pasa por el origen de coordenadas. ¿Cómo se llama esta recta?

51. Comprueba si el punto $(2, 1)$ pertenece a cada una de las siguientes rectas:

    a) $r \equiv \left.\begin{array}{rcl} x & = & 4 + 2t \\ y & = & 2 + t \end{array}\right\}$

b) $s \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1}$

c) $t \equiv 2x - 3y + 1 = 0$

52. Halla el valor de D para que el punto $P\,(-2, 3)$ pertenezca a la recta $-2x + 5y + D = 0$

53. Determina la posición relativa y halla el punto de corte en los casos en los que sea posible, de los siguientes pares de rectas:

    a) $r \equiv 2x + 3y = 5$ y $s \equiv 2x - 3y = 11$

    b) $r \equiv 2x + 3y = -6$ y $s \equiv -4x - 6y = 12$

    c) $r \equiv 4x - 3y = 5$ y $s \equiv 2x + y - 3 = 0$

54. Encuentra el valor de m para que las rectas $3x - y + 4 = 0$ y $mx - 5y = -20$ sean paralelas.

55. Dados los puntos $A\,(2, 3)$ y $B\,(1, -2)$, calcula:

    a) El vector $\vec{AB}$

    b) El módulo y el argumento del vector anterior.

    c) La ecuación implicita de la recta, r, que tiene por vector director el vector $\vec{AB}$ y pasa por el punto B.

    d) Una recta paralela a la anterior y que pase por el punto $(5, -1)$.

    e) Una recta perpendicular a r y que pase por el punto $(2, 4)$.

56. Halla un punto, la pendiente y un vector director y un vector normal de la recta $r \equiv 3x + y = 2$

57. Escribe la ecuación de las rectas paralelas a los ejes y que pasan por el punto $P\,(-3, 5)$

58. Escribe la ecuación de la recta mediana de un triángulo de vértices $A\,(1, 0)$, $B\,(2, 3)$ y $C\,(4, -4)$ relativa al lado AC.

59. Dado un triángulo de vértices A$(2, 1)$, $B\,(7, 3)$ y $C\,(3, 6)$, calcula:

    a) Las rectas a la que pertenecen los tres lados.

    b) El punto medio del lado AB.

    c) El punto medio del lado AC.

    d) La mediatriz del triángulo relativa al lado AB.

    e) La mediatriz del triángulo relativa al lado AC.

    f) El circuncentro del triángulo ABC.

    g) La altura del triángulo relativa al lado AB.

    h) La altura del triángulo relativa al lado AC.

    i) El ortocentro del triángulo.

    j) La mediana del triángulo relativa al lado AB.

    k) La mediana del triángulo relativa al lado AC.

    l) El baricentro del triángulo.

    m) Comprueba que el ortocentro, el circuncentro y el baricentro pertenecen a la misma recta.

60. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C\,(2, 3)$ y radio 2.

61. Razona si la expresión $x^2+y^2-6x-8x+21=0$ es una circunferencia. En caso afirmativo calcula su centro y su radio.

62. Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A\,(2,0)$, $B\,(8,0)$y $C\,(3,5)$.

63. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $C\,(2,3)$ y pasa por el punto $P\,(5,5)$.

64. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $C,(-2,5)$ y es tangente al eje de ordenadas.

65. Estudia la posición relativa de la recta $y=3-2x$ con respecto a las circunferencias:

    a) $x^2+y^2-2x+3y+2=0$

    b) $x^2+y^2-3x+4y-3=0$

    c) $2x^2+2y^2+3x+5y-5=0$

    En caso de ser tangentes o secantes, halla los puntos de intersección.

66. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(-3,0)$ y es perpendicualr a la recta $3x-y+6=0$.

67. Escibe la ecuación general de lar recta que pasa por el punto $(3,1)$ y es paralela a la recta $y=-2x+5$.

68. Halla las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $(4,2)$ y $(3,-7)$.

69. Si $M\,(-3,5/2)$ es el punto medio del segmento AB y las coordenadas de B son $(7,-2)$, ¿cuáles son las coordenadas de A?

70. Desde el punto $(-1,5)$ se traza una recta perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante. Halla las ecuaciones de dicha recta.

71. Halla la pendiente, un vector director y un vector normal de la recta $3x-2y+1=0$.

72. Dada la recta $r\equiv 2x+y-4=0$, escribe la ecuación general de otra recta s, que corta a r en un punto de ordenada $y=4$ y cuya pendiente es el doble que la de r.

73. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A\,(-2,3)$ y tiene pendiente -2.

74. Halla la intersección de las rectas $r\equiv \begin{cases} x=-3+t \\ y=4-3t \end{cases}$ y $s\equiv -x+y=3$.

75. Dadas las rectas $3x-4y+7=0$ y $kx+8y-9=0$, halla el valor de k para que sean paralelas.