1 Ejercicios de derivadas

1. Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 5x$ en el intervalo $[1, 4]$. ¿Cuál es la pendiente de la recta secante a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$?

2. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x - 3$ en los intervalos:

   a) $[1, 4]$

   b) $[-1, 3]$

   c) $[2, 6]$

   ¿Podrías sacar alguna conclusión con los resultados obtenidos?

3. En la siguiente tabla podemos ver los kilómetros que ha recorrido en cada hora Fernando Alonso, durante las 24 horas de Lemans, en algunas de las horas que ha estado conduciendo:

   Se quiere analizar en qué periodo Fernando Alonso ha aumentado la velocidad, si de 2 a 5 horas o de 5 a 10 ahoras. Para ello, calcula la tasa de variación media en esos dos periodos y completa la respuesta:

Tiempo (horas)	2	3	5	7	10
Espacio (km)	310	455	750	1000	1350

   a) $TVM[1, 5]$

   b) $TVM[5, 10]$

   La velocidad es mayor entre las ________________ y las ________________

4. Un móvil sigue una curva de ecuación $f(x) = x^2 + 1$. Calcula la velocidad media en los siguientes intervalos:

   a) $TVM[1, 3]$

   b) $TVM[1, 2$

   c) $TVM[1, 1, 2]$

   d) $TVM[1, 1, 1$

   e) $TVM[1, 1, 01]$

   f) ¿Podrías aventurar cuál es la velocidad instantánea en el punto $x = 1$?

5. Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $x = 1$.

6. Escribe la ecuación de las rectas tangente y normal de la función anterior en el punto $x = 1$.

7. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba, la altura (en metros), y, que alcanza a los \$$x$\$ segundos es $y = -x^2 + 4x$.

   a) Calcula la velocidad de la pelota al cabo de un segundo.

b) Calcula la altura máxima que alcanza la pelota y el momento en que lo alcanza.

c) Calcula la velocidad en el instante en que la pelota alcanza su altura máxima?

8. La distancia que recorre un cuerpo en caída libre en función del tiempo es $d = 4,9t^2$. Si se lanza una pelota desde una altura de 10 metros, ¿cuál es la velocidad con que llega la pelota al suelo?

9. Aplicando la definición de derivada, calcula las siguientes derivadas (habitualmente se escribe derivada y no función derivada) de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 5$

   b) $f(x) = 2x + 4$

   c) $f(x) = x^2 + 3$

10. Calcula, aplicando la definición de derivada, la derivada de la función $f(x) = 2x - 3$. Compara este ejercicio con el ejercicio 2

11. Dada la función $y = x^2 + 3x - 4$, halla el punto donde la recta tangente a la curva es perpendicular al eje de ordenadas.

12. Calcula las siguientes derivadas:

   a) $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$

   b) $y = \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{4x}{5} - \dfrac{1}{7}$

   c) $y = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$

   d) $y = \dfrac{x^2}{5x - 3}$

   e) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - x + 1}$

   f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

   g) $y = e^x \left(3x^2 - 3x + 2\right)$

   h) $y = \left(x^2 + 3\right)\left(x^2 + 3x - 2\right)$

   i) $y = \dfrac{2^x}{x - 1}$

   j) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$

   k) $y = x \cdot 2^x$

   l) $y = \dfrac{\log_3 x}{3^x}$

   m) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{x\sqrt{x}}$

   n) $y = x \cdot e^x$

   ñ) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

   o) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

   p) $y = x \cdot \ln x$

   q) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

   r) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

   s) $y = x \cdot \arcsin x$

   t) $y = \dfrac{\arctan x}{x^2}$

   u) $y = \cot x$

   v) $y = \dfrac{2}{x^6}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $y = \ln(x - 2)$

   b) $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^4$

   c) $y = \sqrt{3x^2 + 3x - 2}$

   d) $y = \sqrt[4]{4x^3 + 3x^2 - x + 5}$

   e) $y = \sqrt{5^{2x-1}}$

   f) $y = \dfrac{x - 3}{(2x - 1)^2}$

g) $y = \ln(1 + \tan x)$

h) $y = (3x^4 + 2x + 4)^4$

i) $y = \left(\dfrac{3x-2}{4x+1}\right)^3$

j) $y = \tan^2(2x + 4)$

k) $y = e^{cos2x}$

l) $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x$

m) $y = \sqrt[5]{1 - \cos x}$

n) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

ñ) $y = 3^{2x-3}$

o) $y = e^{x^2} \cdot (2x^3 + 3x - 1)$

p) $y = \tan 2x$

q) $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x}$

r) $y = \log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

s) $y = \ln^2(x^2 - x + 1)$

t) $y = \ln(x^2 - x + 1)^2$

u) $y = \operatorname{sen}^2 x$

v) $y = \operatorname{sen} x^2$

w) $y = e^{x^2-7x+3}$

x) $y = \ln\sqrt{1 - x}$

y) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3}$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{3x^2} - x^6 + x \cdot e^x$

b) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 3}$

c) $y = \sqrt{\arccos x}$

d) $y = \dfrac{2^{3x}}{x^2}$

e) $y = \operatorname{sen}(\ln x)$

f) $y = \arcsin\sqrt{x}$

g) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

h) $y = \sqrt[4]{e^{5x-3}}$

i) $y = 10^{\sqrt{x}}$

j) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

k) $y = \ln(x(1 - x))$

15. Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{e^{3x}+1}{e^{3x}-1}}$

c) $y = \sqrt{\operatorname{sen}^5(5x - 3)}$

d) $y = \tan\sqrt{2x}$

e) $y = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)$

f) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \cos 5x}{\cos(3x^2 - 5x + 1)}$

16. Calcula las derivadas segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $y = 6x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

b) $y = 5x^2 + 1$

c) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$

d) $y = \dfrac{1}{x}$

e) $y = \ln x$

f) $y = \cos 2x$

g) $y = e^{-4x}$

h) $y = \operatorname{sen}^2 x$

17. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen} x^{\cos x}$

b) $\sqrt[x^2]{\arccos x}$

c) $y = \log_{\operatorname{sen} x} x$

d) $y = x^{3x}$

18. Considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

19. La función $f(x)$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$$

Calcula a y b para que la función $f(x)$ sea derivable.

20. La función $f(x)$ está definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad.

21. Dada la función $f(x) = \dfrac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, encuentra a para que si f' es la derivada de f, $f'(-1) = -10$

22. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x \leq 0 \\ -1 + 2x & 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 2x & x > 1 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente $f(x)$.

b) Estudia la continuidad en $x = 0$ y en $x = 1$.

c) Estudia la derivabilidad de $f(x)$.

23. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

24. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x \leq 1 \\ |x - 2| & x > 1 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente $f(x)$.

b) Estudia su continuidad.

c) Estudia su derivabilidad.

25. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq -1 \\ -x^2 & -1 < x < 1 \\ x^2 - 4x & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente $f(x)$.

b) Estudia la continuidad y la derivabilidad.

26. Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo punto:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$$

27. Calcula las funciones derivadas de:

a) $f(x) = \dfrac{Lnx}{x^2}$

b) $g(x) = (1 - x^3) \cdot cos^3 x$

c) $h(x) = 4x^3 - 5x + \dfrac{1}{e^x}$

28. Sea $f(t) = \begin{cases} -t^3 + 5t^2 & 0 \leq t < 3 \\ -t^2 + 12t - 9 & 3 \leq t \leq 5 \\ 2t + 16 & 5 < t \leq 10 \end{cases}$

Estudia la continuidad y la derivabilidad de f en $t = 3$ y $t = 5$.

29. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & x \leq 2 \\ a \cdot (x-3)^2 + 3 & x > 2 \end{cases}$

Halla a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

30. Halla la función derivada de $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$

31. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^3} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}$ b) $g(x) = ln\dfrac{3x^2}{x-5}$ c) $h(x) = e^{5x} + \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

32. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = ln^2 x - ln(lnx)$ b) $g(x) = ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$ c) $h(x) = \sqrt{e^{3x} - \dfrac{5 + lnx}{3x+5}}$

33. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & x \leq 1 \\ \dfrac{3}{bx} & x > 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todos los puntos.

b) Para $a = 6$ y $b = \dfrac{3}{4}$, determina los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esboza la gráfica de f.

34. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ (x-1)^2 & x > 0 \end{cases}$

    a) Dibuja su gráfica.

    b) Estudia su continuidad en el punto $x = 0$.

35. Considera la función definida a trozos siguiente: $f(x) = \begin{cases} -4x + 1 & x \leq 2 \\ x^2 - 5 & -2 < x < 1 \\ bx + 3 & 1 \leq x \end{cases}$

    a) Calcula los valores de a y b tales que $f(x)$ sea continua para todo x.

    b) Haz un gráfico de la función obtenida en el apartado anterior.

36. Calcula los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & 0 < x < 1 \\ bx & x \geq 1 \end{cases}$

    sea continua en todo punto.

37. Deriva las funciones:

    a) $f(x) = 2\sqrt{x} - lnx$ *b*) $g(x) = \dfrac{6 - x^5}{x^6}$ *c*) $h(x) = e^{x^3}$